



TITLE:

Some group-theoretic aspects of outer
Galois representations associated to
hyperbolic curves(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Iijima, Yu

CITATION:

Iijima, Yu. Some group-theoretic aspects of outer Galois representations associated to hyperbolic curves. 京都大学, 2015, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2015-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k18769>

RIGHT:

学位規則第9条第2項により要約公開

(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	飯島 優
論文題目	Some group-theoretic aspects of outer Galois representations associated to hyperbolic curves (双曲的曲線に付随する外ガロア表現のいくつかの群論的側面について)		
(論文内容の要旨)			
<p>本論文は、双曲的曲線あるいはそのモジュライ空間や配置空間に付随する外ガロア表現の群論的側面について論じ、特に、外ガロア表現の持つ群論的性質がどのような純群論的一般化を有するかという問題と、外ガロア表現がどのような群論的性質を有するかという問題の二つを主に取り扱っている。</p> <p>本論文の第1章では、まず前者の問題、すなわち外ガロア表現の持つ群論的性質がどのような純群論的一般化を有するかという問題を取り扱っている。双曲的曲線のモジュライスタックの代数的基本群から有理数体の絶対ガロア群への自然な全射は、有理数体上の完全退化双曲的曲線の存在という幾何的理由により分裂することがわかる。一方、本学の望月新一教授と星裕一郎講師の共同研究により、双曲的曲線の高次配置空間の幾何的基本群のファイバー・カスプ許容的外部自己同型群からグロタンディーク・タイヒミュラー群への自然な全射が構成されており、これは、先の全射の純群論的一般化とみなすことができる。本章の主結果(定理A)は、この純群論的な全射が分裂することを示している。また、この結果の証明のための重要な材料として、完全退化な「semigraph of anabelioids (遠アーベル型の半グラフ)」のグラフ的自己同型群から貼り合わせ可能群への自然な全射の分裂性に関する結果(定理B)も得ている。</p> <p>本論文の第2章では、後者の問題、すなわち外ガロア表現がどのような群論的性質を有するかという問題を取り扱っている。特に、双曲的曲線に付随する副ℓ外ガロア表現や普遍副ℓ外モノドロミー表現の像がℓ進リー群になるかという問題を考え、以下のような結果を得ている。まず、定理Cでは、基礎体がℓ円分惰性充満という条件を満たすという仮定の下で、双曲的曲線に付随する副ℓ外ガロア表現の像がℓ進リー群にはならないこと、特に、双曲的曲線の副ℓ基本群のアーベル化に付随するℓ進ガロア表現の像とは一致しないことを証明している。なお、基礎体が数体もしくはその上の有限生成体、ℓ進局所体もしくはその上の有限生成体、あるいはより一般に(一般化)劣ℓ進体ならば、ℓ円分惰性充満という仮定を満たしている。次に、定理Dでは、基礎体が任意の標数0の体の時に、双曲的曲線のモジュライ空間に付随する普遍副ℓ外モノドロミー表現の像がℓ進リー群にならないこと、特に、双曲的曲線の副ℓ基本群のアーベル化に付随するℓ進モノドロミー表現の像とは一致しないことを、例外的な場合(種数が0でカスプの数が3の場合及び種数が1でカスプの数が1の場合)を除いて証明している。更に、これらの結果の副Σ版への部分的一般化、基礎体がℓ円分惰性充満ならば副ℓ外ガロア表現の核体はいかなるアーベル多様体のℓ冪等分点の座標を添加した体とも一致しないこと、副ℓ外ガロア表現の核体が高次円分ℓ単数とヤコビ多様体のℓ冪等分点の座標を全て添加した体より真に大きくなる例の構成など、さまざまな応用を得ている。なお、定理Dの証明の中で、参考論文「Galois action on mapping class groups」の結果を用いている。また、定理Dは、参考論文「A pro-ℓ version of the congruence subgroup problem for mapping class groups of genus one」の結果と相補的な関係を有している。</p>			

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

双曲的曲線あるいはそのモジュライ空間や配置空間の基本群に付随する外ガロア表現は、数論幾何のみならず、整数論、代数幾何、トポロジーその他の周辺分野とも深い関係を保ちながら、1980年代から現在に至るまで盛んに研究されており、本学数理解析研究所はその世界的中心拠点であり続けている。この分野の研究指針の一つは、グロタンディークが1980年代に提唱した遠アーベル幾何である。グロタンディークの遠アーベル幾何は、通常可換環論で記述される代数幾何を、基本群を通じて群論のみで完全に再構成しようという壮大な試みで、今なお不明な点が多く、多数の重要未解決問題を与えているが、双曲的曲線の場合は、本学の玉川安騎男教授、望月新一教授らにより、その第一段階（基本予想）は確立している。本論文で取り扱われている問題は、この分野の研究の第二段階を目指すものと考えられ、学術的に重要かつ自然な問題であると評価できる。

本論文の定理Aは、双曲的曲線の高次配置空間の幾何的基本群のファイバー・カスプ許容的外部自己同型群からグロタンディーク・タイヒミュラー群への自然な全射が分裂することを示しているが、グロタンディーク・タイヒミュラー群は、有理数体の絶対ガロア群を群論的に近似するものとして興味を持たれており、幾何的対応物の全射の分裂性が幾何的証明によって示されていたことを考え合わせると、興味深い結果と言える。また、この結果の証明のための材料として、定理Bでは、完全退化なsemigraph of anabelioidsのグラフ的自己同型群から貼り合わせ可能群への自然な全射が分裂することを示しているが、こちらは、純組み合わせ論的遠アーベル幾何における結果として重要である。

本論文の定理Cは、基礎体が ℓ 円分惰性充満という条件を満たすという仮定の下で、双曲的曲線に付随する副 ℓ 外ガロア表現の像が ℓ 進リー群にはならないこと、特に、任意のアーベル多様体に付随する ℓ 進表現の像とは一致しないことを示しているが、この数論的結果は、本学星裕一郎講師の従来結果を大きく一般化するものとして重要である。また、定理Dは、基礎体が任意の標数0の体の時に、双曲的曲線のモジュライ空間に付随する普遍副 ℓ 外モノドロミー表現の像が ℓ 進リー群にならないこと、特に、双曲的曲線の副 ℓ 基本群のアーベル化に付随する普遍 ℓ 進モノドロミー表現の像と一致しないことを（例外的な場合を除いて）示しているが、この結果は、トポロジーで重要な写像類群のトレリ部分群の非自明性を一般化した上で、数論幾何的証明を与えたものと考えられて興味深く、さまざまな応用を持ち重要である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成27年1月9日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

なお、本論文は、京都大学学位規程第14条第2項に該当するものと判断し、公表に際しては、当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。

要旨公表可能日： 年 月 日以降